En ny almindelig Methode til Integration af en egen Klasse af lineære Differentialligninger,

meddelt af Professor **A. Steen.**

1. Den almindelige lineære Differentialligning af n^{te} Orden

$$P\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \quad (1)$$

(P, P_1, P_2 . . . P_{n-1}, P_n indeholde altsaa ikke y) antages her at have n partikulære Integraler af Formen

$$y=f(m,x), \quad (2)$$

kun afvigende fra hverandre ved Værdierne af m. Et hvilketsomhelst partikulært Integral er da

$$y_r=c_rf(m_r,x) \quad (3)$$

og det fuldstændige Integral

$$y=c_1f(m_1,x)+c_2f(m_2,x)+\ldots\ldots+c_nf(m_n,x).$$

Indsættes det i (2) angivne almindelige Udtryk for y i (1), maa denne være tilfredsstillet, forsaavidt m tillægges visse bestemte Værdier, i Antal n, af hvilke dog nogle, s, kunne blive ligestore, men i saa Tilfælde har man kun at benytte

$$y=\frac{d.f(m,x)}{dm},=\frac{d^2.f(m,x)}{dm^2},\ldots\ldots=\frac{d^{s-1}.f(m,x)}{dm^{s-1}},$$

istedenfor de $s-1$ af de partikulære Integraler, der skulde svare til de s ligestore Værdier af m.*)

Som Følge af den nævnte Substitution maa man erholde en Ligning af Formen

$$\varphi(m)\,\psi(x,m)=0,$$

for at deraf kan udledes en Ligning

$$\varphi(m)=0 \quad (4)$$

til Bestemmelse af m uafhængig af x.

2. Det kommer nu an paa at komme til Erkjendelse af, hvilke Ligninger af Formen (1) der lade sig integrere ved Funktioner af Formen (2), og hvorledes disse Funktioners Form kan

*) Herom henvises til min Afhandling: Forskjællige Theoriers Udvikling af et fælles Princip, i math. Tidsskrift 1 Aarg. (1859) Side 149—150, samt til mine Forelæsn. over Diff. og Int.regn Side 191.

bestemmes. Begge Spørgsmaal afgjøres imidlertid uden Vanskelighed paa een Gang. Den til (3) svarende almindelige Form

$$y = cf(m, x) \tag{5}$$

maa næmlig ved Differentiation og Elimination af c give en Differentialligning af første Orden, uafhængig af m's forskjællige Værdier,

$$f(m, x)\frac{dy}{dx} = y\,\frac{d\,.f(m, x)}{dx},$$

som med en forandret Betegnelse kan skrives saaledes

$$F(m, x)\frac{dy}{dx} = y, \tag{6}$$

hvortil svarer

$$y = ce^{\int\frac{dx}{F(m,\,x)}}. \tag{7}$$

Men nu kan man paa dobbelt Maade erholde en lineær Differentialligning i y af Ordenen $n + 1$, hvori y selv ikke findes. Det kan for det Første skee ved Differentiation af (1) og Elimination af y, hvilken Elimination dog er overflødig, naar P_n er konstant, og da det altid er muligt at ændre (1) saaledes, at Koefficienten P_n til y er konstant, saa antages P_n i (1) uafhængig af x, som den allerede er det af y. Man faaer da den nævnte Differentialligning af $(n + 1)$ Orden, begyndende med

$$P\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \left(P_1 + \frac{dP}{dx}\right)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots\ldots \tag{8}$$

Dernæst kan Differentialligningen af $(n + 1)^{te}$ Orden uden y faaes ved umiddelbar Substitution af Udtrykket (6) for y og de deraf afledte for $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$, der henholdsvis indeholde højest $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Men saaledes dannet begynder den med

$$P\frac{d^n.\,F(m, x)\frac{dy}{dx}}{dx^n} + P_1\,\frac{d^{n-1}.\,F(m, x)\frac{dy}{dx}}{dx^{n-1}} + \ldots.$$

eller med

$$PF(m, x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \left(P_1\,F(m, x) + nP\frac{d.\,F(m, x)}{dx}\right)\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots \tag{9}$$

Og heraf ses, at de Differentialligninger, hvis venstre Sider begynde med Udtrykkene (8) og (9), kun kunne blive identiske, naar den til (8) svarende Form multipliceres med $F(m, x)$ og man dernæst har

$$nP\frac{d\,.\,F(m,x)}{dx} = F(m,x)\frac{dP}{dx}.$$

Ved Integration erholdes

$$\big(F(m,x)\big)^n = aP$$

eller

$$F(m,x) = \sqrt[n]{aP}, \tag{10}$$

hvor a er den arbitrære Konstant.

Da P ikke indeholder m, maa m indeholdes i a, og da (10) indsat i (7) giver

$$y = c\,e^{\int\frac{dx}{\sqrt[n]{aP}}},$$

hvor $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ er en med m varierende Konstant, der iøvrigt er arbitrær, saa kan man sætte

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = m$$

og faaer derved til Bestemmelse af $f(m,x)$

$$y = cf(m,x) = c\,e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}}}. \tag{11}$$

3. Herved er da den fælles Form for de partikulære Integraler (2), der skulle kunne tjene til Integration af (1), fuldkomment bestemt. Det kommer kun an paa nærmere at angive den Form, (1) maa have for at være integrabel ved n partikulære Integraler af Formen (11) eller, i Tilfælde af ligestore m, ved de deraf ved Differentiation med Hensyn til m afledede. Skjønt denne Bestemmelse uden Vanskelighed lader sig iværksætte ved fortsat Sammenligning af de to Differentialligninger, der begynde med Leddene (8) og (9), saa lønner det dog ikke Umagen at fremstille den Række af lineære Differentialligninger af første Orden i P_1, P_2 .... P_{n-1}, samt en Ligning af første Grad i P_n, hvoraf disse Størrelser bestemmes ved P; thi dersom man blot indsætter

$$y = e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}}},$$

erholdes nødvendig Ligning (4) til Bestemmelse af m, hvis Integrationen ad denne Vej overhoved er mulig. Endnu simplere turde det være at ændre den uafhængige Variable til

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}},$$

thi derved faaes en Differentialligning med partikulære Integraler af Formen

$$y = e^{mt},$$

altsaa med konstante Koefficienter, hvorefter det er let at danne Ligning (4) i m. Anvendelsen paa de lineære Differentialligninger med konstante Koefficienter og med Koefficienter af Formen $P_r = A_r(a+bx)^{n-r}$ fører til de velbekjendte Former, $y = e^{mx}$ og $y = (a+bx)^m$, for de partikulære Integraler.

4. Heraf sluttes følgende almindelige

Theorem.

Naar en lineær Differentialligning, hvori $P\frac{d^n y}{dx^n}$ er Leddet af højest Orden og y har en konstant Koefficient, skal være integrabel ved lutter partikulære Integraler af samme Form, $y = f(m,x)$, svarende til forskjællige Værdier af m, saa maa denne Form være

$$y = e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}}}$$

og Substitutionen af dette Udtryk for y maa give en Ligning i m af n^{te} Grad, eller Ændring af den uafhængige Variable til

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}},$$

maa give en lineær Differentialligning af n^{te} Orden med konstante Koefficienter.